Derivada y diferencial

Una cuestión, que aparece en cualquier disciplina científica, es la necesidad de obtener información sobre el cambio o la variación de determinadas cantidades con respecto al tiempo o a otras variables de las que dependen. Ejemplos tales como la velocidad, razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo, la tasa de crecimiento de la población de una determinada especie, velocidad de reacción, etc., son el origen empírico de los conceptos matemáticos de derivada y diferencial.

1. Introducción al concepto de derivada

Tasa de variación media. Definición

Se define la tasa de variación media de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y se denota por $TVM[a, b]$, al cociente entre los incrementos de la función y de la variable, es decir

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La TVM nos da idea de si la función crece o decrece, globalmente, en el intervalor $[a, b]$ y con qué rapidez lo hace, pero si estamos interesados en saber si la función tiene una tendencia creciente o decreciente en un punto a, podemos considerar la TVM en un intervalo $[a, a + h]$, y a medida que h se acerca a 0, la $TVM[a, a + h]$

se acerca a la tasa de variación en el punto a. Así, podemos definir:

Tasa de variación instantánea. Definición

Se define la tasa de variación instantánea en un punto a de una función $f(x)$, y se denota por $TVI(a)$, al límite cunado h tiende a 0 de la $TVM[a, a+h]$, esto es,

$$TVI(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La derivada de la función $f(x)$ en el punto a es la tasa de variación instantánea en dicho punto.

2. Derivada en un punto

Derivada de una función en un punto. Definición

Dada un función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, y un punto $a \in \overset{o}{A}$, se dice que f es derivable en a si existe y es real el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Al valor de este límite se le denomina derivada de f en el punto a y se denota por $f'(a)$.

Observaciones:

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea en dicho punto, por lo que a $f'(a)$ se le denomina también coeficiente de variación de f o razón de cambio de la función f en el punto a.

Si hacemos $x = a + h$, podemos definir la derivada de f en el punto a de modo equivalente como

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivadas laterales. Definición

Sea f una función real de variable real.

a) Si f está definida en un intervalo a la derecha de a, al número

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si existe, se le denomina derivada por la derecha de f en a.

b) De manera similar, si f está definida en un intervalo a la izquierda de a, al número

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

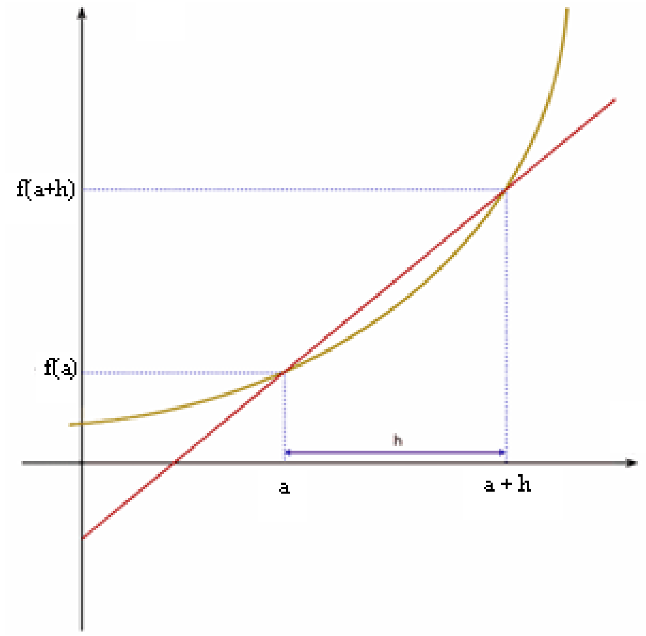
si existe, se le denomina derivada por la izquierda de f en a.

Proposición

La derivada de una función en un punto existe si y sólo si existen las derivadas laterales y coinciden.

Interpretación geométrica de la derivada

Dada una función $f(x)$, la tasa de variación media en el intervalo $[a, a+h]$ corresponde a la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$:



Por tanto, cuando nos acercamos al punto a, es decir, cuando calculamos la tasa de variación instantánea o la derivada en el punto a, este valor es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto a.

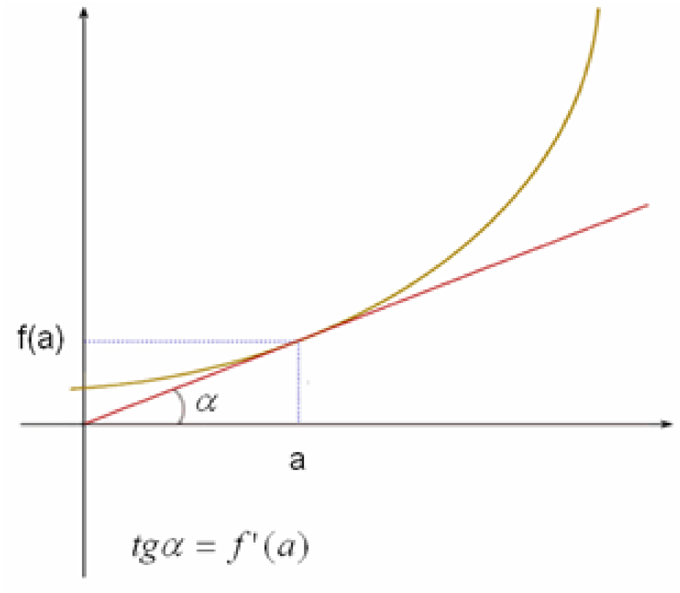
Así, se define la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a, como la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$. La ecuación de la recta tangente a f en a es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Por otro lado, si α_h es el ángulo que forma la recta secante a la curva que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ con el eje x, se tiene que

$$tg\,\alpha_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es decir, la tasa de variación media es también la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta secante a la curva que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ con el eje x. Por tanto, cuando nos acercamos al punto a, es decir, cuando calculamos la tasa de variación instantánea o la derivada en el punto a, este valor es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente a la curva en el punto a con el eje x.



Derivabilidad y continuidad. Teorema

Si una función f es derivable en un punto a, entonces es continua en a.

El recíproco de este resultado no es cierto.

Propiedades de la derivada

1. Si $f(x) = c$, donde $c \in I\!R$ es una constante, entonces $f'(a) = 0$ para todo punto a del interior del dominio de f.

2. Si $f(x) = x$, entonces $f'(a) = 1$ para todo punto a del interior del dominio de f.

3. Si f y g son funciones derivables en el punto a y $c \in I\!R$, entonces también son derivables las funciones $f+g$, cf y fg y se verifica:

$$(f+g)'(a) \quad = \quad f'(a) + g'(a)$$

$$(cf)'(a) = cf'(a)$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Si $g(a) \neq 0$ entonces también f/g es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

4. Derivada de la composición de funciones. **Regla de la cadena**.

Si f es una función derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces la función compuesta $(g \circ f)$ es derivable en a y

$$(g \circ f)' = g'(f(a))f'(a)$$

5. Derivada de la función inversa.

Sea $f : A \longrightarrow I\!R$ derivable en a, con $f(a) \neq 0$, y $f^{-1} : f(A) \longrightarrow I\!R$ la inversa de f. Entonces f^{-1} es derivable en $f(a)$ y

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

como consecuencia de la Regla de la cadena.

Función derivable en un conjunto. Definición

Sea A un subconjunto abierto de $I\!R$, y f una función definida en A. Se dice que f es derivable en A si lo es en todos sus puntos.

Función derivada. Definición

Sea f una función derivable en un conjunto A. La función que en cada punto $x \in A$ toma el valor $f'(x)$ se denomina función derivada de f y se denota por f'.

En la tabla 1, se muestra la derivada de algunas funciones derivables en su dominio.

Tabla 1: Tabla de derivadas

Función	Derivada
$f(x) = (g(x))^n$	$f'(x) = n(g(x))^{n-1}g'(x)$
$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$f'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{g(x)^{n-1}}}g'(x)$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$
$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)}g'(x)\ln a$
$f(x) = \ln g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)}g'(x)$
$f(x) = \log_a g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)}g'(x)\log_a e$
$f(x) = \operatorname{sen} g(x)$	$f'(x) = g'(x)\cos g(x)$
$f(x) = \cos g(x)$	$f'(x) = -g'(x)\operatorname{sen} g(x)$
$f(x) = \operatorname{tg} g(x)$	$f'(x) = g'(x)\left(1 + \operatorname{tg}^2 g(x)\right)$
$f(x) = \operatorname{cotg} g(x)$	$f'(x) = -g'(x)\left(1 + \operatorname{cotg}^2 g(x)\right)$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - g^2(x)}}g'(x)$
$f(x) = \operatorname{arc\,cos} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - g^2(x)}}g'(x)$
$f(x) = \operatorname{arc\,tg} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1 + g^2(x)}g'(x)$
$f(x) = \operatorname{arc\,cotg} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1 + g^2(x)}g'(x)$

Derivadas sucesivas

Derivada segunda de una función en un punto. Definición

Sea $f : A \longrightarrow I\!R$, y $a \in A$ un punto tal que f es derivable en un entorno de a. Si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

la función f' es derivable en el punto a y al valor de este límite se le denomina derivada segunda de f en a y se denota por $f''(a)$.

Función derivada segunda. Definición

Sea $f : A \longrightarrow I\!R$, tal que para todo $x \in A$ existe $f''(x)$. La función que en cada punto $x \in A$ toma el valor $f''(x)$ se denomina función derivada segunda de f y se denota por f''.

Derivadas sucesivas. Definición

Si f es una función $n-1$ veces derivable en un entorno de a, se define la derivada n-ésima de f en a, como

$$f^{(n}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1}(a+h) - f^{(n-1}(a)}{h},$$

si este límite existe y es finito. De forma análoga, a como se definido la función derivada segunda, se define la función derivada n-ésima de f.

3. Diferencial en un punto

En la sección anterior se ha definido la derivada de una función f en el punto a como

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Equivalentemente, si $f'(a)$ es la derivada de f en a, se verifica

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0$$

por lo que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \varepsilon, \quad \text{con } \varepsilon \to 0 \text{ cuando } h \to 0$$

y multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por h se tiene

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \varepsilon h$$

Así, cuando $h \to 0$, $f(a+h) - f(a)$ se puede expresar como suma de dos sumandos, donde εh converge hacia cero más rápidamente que h, por lo que se puede considerar despreciable frente al otro sumando.

Se da entonces la siguiente definición:

Si la función f es derivable en el punto a, se llama diferencial de f en a, y se representa por $df(a)$, a

$$df(a) = f'(a)h$$

Por otro lado, si consideramos la función $f(x) = x$ tendremos que, por un lado, $df(x) = dx$ y, por otro, $f'(x)h = h$, de donde se deduce que $dx = h$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, la diferencial de la variable independiente coincide con el incremento de dicha variable. Por lo que se da, en general, la siguiente definición.

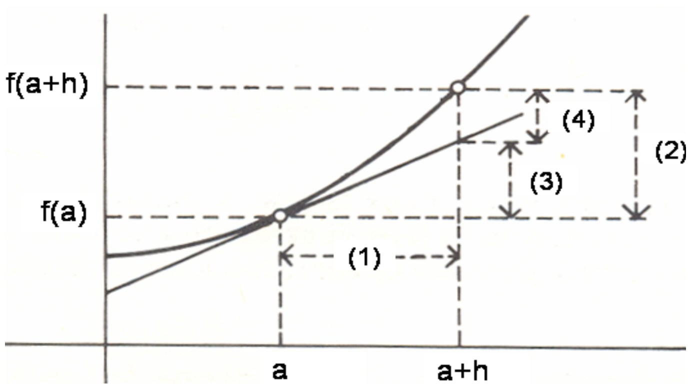
Diferencial en un punto. Definición

Dada una función f derivable en un punto a, se llama diferencial de f en el punto a y se denota por $df(a)(dx)$ a

$$df(a)(dx) = f'(a)dx$$

Interpretación geométrica de la diferencial

Consideramos la siguiente figura:



donde:

(1) es h, el incremento de la variable x,

(2) $f(a+h) - f(a)$, el incremento de la función,

(3) $f'(a)h$, el incremento bajo la tangente a la curva,

(4) εh el incremento residual de f.

Y se tiene que la diferencial de una función f en a es la aplicación lineal que mejor aproxima a $f(x) - f(a)$ en un entorno de a.

Sea $y = f(x)$, el incremento de y cerca del punto a es, aproximadamente, $dy = f'(a)dx$ (por lo que también se denota a la derivada por $f'(x) = \frac{dy}{dx}$).

La aproximación lineal que proporciona la diferencial significa aproximar la curva $y = f(x)$ por su tangente en el punto a.

Diferenciales sucesivas. Definición

Sea un función que admite derivada de segundo orden en un punto a. Se llama diferencial segunada de f en a, y se denota por $d^2 f(a)(dx)$ (o $d^2 y$), a la diferencial de $df(a)$, es decir,

$$d^2 f(a)(dx) = f''(a)(dx)^2$$

y en general, la diferencial n-ésima de f en a como

$$d^n f(a)(dx) = f^{(n}(a)(dx)^n$$

4. Aplicaciones de la derivada. Extremos de funciones de una variable

Crecimiento en un intervalo. Definición

1. La función f es creciente en un intervalo $I \subset \mathrm{Dom} f$ si para todo par de puntos $x, y \in I$ con $x < y$, se tiene $f(x) \leq f(y)$.

2. La función f es estrictamente creciente en I si dados $x, y \in I$ con $x < y$, se tiene $f(x) < (y)$.

Decrecimiento en un intervalo. Definición

1. La función f es decreciente en un intervalo $I \subset \mathrm{Dom} f$ si para todo par de puntos $x, y \in I$ con $x < y$, se tiene $f(x) \geq f(y)$.
2. La función f es estrictamente decreciente en I si dados $x, y \in I$ con $x < y$, se tiene $f(x) > (y)$.

Teorema

Sea f derivable en un intervalo I. Entonces

1. f es creciente en I si y sólo si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.
2. f es decreciente en I si y sólo si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.
3. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f es estrictamente creciente en I.
4. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es estrictamente decreciente en I.

Extremos relativos. Definición

1. La función f tiene un máximo relativo en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap \mathrm{Dom} f$.
2. La función f tiene un mínimo relativo en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap \mathrm{Dom} f$.

Extremos absolutos. Definición

1. La función f tiene un máximo absoluto en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in \mathrm{Dom} f$.

2. La función f tiene un mínimo absoluto en x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in \mathrm{Dom} f$.

Teorema

Sea $f : (a,b) \longrightarrow I\!R$ y $x_0 \in (a,b)$. Si f tiene un extremo relativo en x_0 y f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Teorema

Sea $x_0 \in (a,b)$ y f continua en x_0.

1. Si esiste $\delta \in I\!R^+$ tal que

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \qquad & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) < 0 \qquad & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{aligned}$$

entonces, f tiene un máximo relativo en x_0.

2. Si esiste $\delta \in I\!R^+$ tal que

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \qquad & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) > 0 \qquad & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{aligned}$$

entonces, f tiene un mínimo relativo en x_0.

Es decir, si la función pasa de creciente a decreciente y viceversa, respectivamente.

Teorema

Sea $x_0 \in I \subset \mathrm{Dom} f$. Supongamos que f tiene n derivadas continuas en x_0 y que $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1}(x_0) = 0, f^{(n}(x_0) \neq 0$.

Si n es par y

$$f^{(n}(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ tiene un mínimo relativo en} x_0$$

$$f^{(n}(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ tiene un máximo relativo en} x_0$$

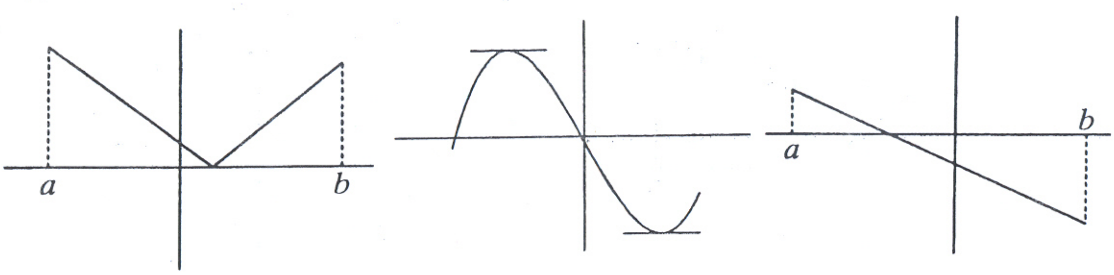
Si n es impar, f no tiene extremo en x_0.

Teorema

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene extremos absolutos en ese intervalo.

Para encontrar los puntos en los que f toma estos valores deben analizarse

1. Los puntos de no derivabilidad de f (figura a))
2. Los valores $x_i \in (a, b)$ tales que $f'(x_i) = 0$ (figura b))
3. Los extremos del intervalo (figura c))



a) b) c)

Extremos de una función relacionada con una dada

1. Si f es una función continua que tine un máximo (mínimo) en x_0, la función $\dfrac{1}{f(x)}$ tiene un mínimo (máximo) en x_0 (supuesto $f(x) \neq 0$ en un entorno de x_0.

2. Si g es una función creciente y $f(x)$ tine un máximo (mínimo) en x_0 entonces $g \circ f$ tiene un máximo (mínimo) en x_0.

3. Si g es una función decreciente y $f(x)$ tine un máximo (mínimo) en x_0 entonces $g \circ f$ tiene un mínimo (máximo) en x_0.

Ejercicios

1. Determinar la derivada de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$	$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$
2. $f(x) = \log_7(x^2 - x)$	$f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x} \log_7 e$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$
4. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$	$f'(x) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{7x^2}}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt[4]{7x^6}}$
6. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$	$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$
7. $f(x) = \dfrac{3}{2^x}$	$f'(x) = -\dfrac{3\ln 2}{2^x}$
8. $f(x) = x^x$	$f'(x) = x^x(\ln x + 1)$
9. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$	$f'(x) = \dfrac{(\ln x)^{\ln x}(\ln\ln x + 1)}{x}$
10. $f(x) = \operatorname{sen}^5(x^2 - 2)$	$f'(x) = 10x \operatorname{sen}^4(x^2 - 2)\cos(x^2 - 2)$
11. $f(x) = \cos^2(x^2 - 2x + 1)$	$f'(x) = -2(x-1)\operatorname{sen}[2(x^2 - 2x + 1)]$
12. $f(x) = \operatorname{sen}x \operatorname{tg}x$	$f'(x) = \operatorname{sen}x \left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$
13. $f(x) = \operatorname{cotg}(1 - 2x^2)$	$f'(x) = 4x(1 + \operatorname{cotg}(1 - 2x^2)) = \dfrac{4x}{\operatorname{sen}^2(1 - 2x^2)}$
14. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(2x - 3)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$

2. Determinar las derivadas de orden n de las siguientes funciones

1. $f(x) = e^{kx}$	4. $f(x) = \ln x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$	5. $f(x) = x^k$
3. $f(x) = \text{sen} x$	6. $f(x) = \cos x$

3. ¿Qué ángulos forman con el eje OX la tangente a la curva $y = x - x^2$ en el punto cuya abcisa es $x = 0$?.

4. Encontrar el punto de la parábola $y = 3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ cuya recta tangente forma un ángulo $\frac{\pi}{4}$ con el eje OX.

5. Indicar los puntos del gráfico donde la tangente es horizontal si

   a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = x^3 - 6x + 5$

6. Determinar los valores de las constantes a y b en la ecuación $y = a \,\text{sen}\, x + b \cos 2x$, sabiendo que la recta $y = \frac{3}{2}$ es tangente a ella en $x = \frac{\pi}{6}$.

7. La ley de Boyle para los gases perfectos establece que a temperatura constante $PV = K$, donde P es la presión, V el volumen y K una constante. Si la presión está dada por la expresión $P(t) = 30 + 2t$, con P en cm de Hg y t en segundos, determinar la razón de cambio del volumen V con respecto al tiempo t a los 10 segundos para un volumen inicial de 60 cm^3.

8. La población P de una colonia de bacterias con espacio y alimentos ilimitados, varía con el tiempo según la expresión $P(t) = Ce^{Kt}$, con t en horas y siendo C y K constantes.

   a) Si en el instante $t = 0$ la población era de 1000 bacterias y al cabo de una hora la misma se duplicó, determinar los valores de C y K.

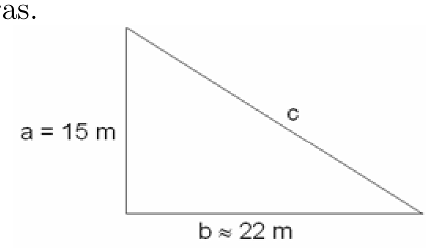
b) Demostrar que la velocidad de crecimiento de la población en un instante es proporcional al número de bacterias en ese instante.

c) Calcular la población al cabo de 2 horas y la velocidad de crecimiento en ese instante.

9. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x$, calcular el error que se comete al tomar como valor del incremento de la función, en el punto $x = 2$, correspondiente a un incremento de la variable igual a $0,01$, el valor de la diferencial correspondiente a dicho incremento.

10. Estimar el valor de $\ln 1,5$.

11. En el triángulo de la figura se sabe que en la medida de b se ha cometido un error de 0,11 m. Calcular el error aproximado cometido al calcular c por el Teorema de Pitágoras.



12. Una caja cerrada de base cuadrada debe tener un volumen de 5000 cm^3. El material del fondo y de la tapa de la caja tiene un coste de 0.03 euros por cm^2 y el material de los laterales cuesta 0.015 euros por cm^2. Determinar las dimensiones de la caja para que el coste total sea mínimo.

13. ¿Qué dimensiones debe tener un cilindro para que sea mínima su área total, dado el volumnen V?

14. La masa m de agua que a 0° C ocupa un volumen de 1 litro, ocupará a T° C un volumen V en litros dado por la expresión

$$V(T) = 10^{-5}(-6.8 \cdot 10^{-3}\,T^3 + 6.8 \cdot 10^{-1}\,T^2 - 6.4\,T + 10^5), \quad 0 \leq T \leq 10$$

Teniendo en cuenta que la densidad ρ de una sustancia homogénea es $\rho = \dfrac{m}{V}$, determinar la temperatura T para la cual la densidad ρ del agua es máxima.